Pontificia Universidad Católica de Chile

Facultad de Letras

Métodos y técnicas de investigación cuantitativa

César Antonio Aguilar

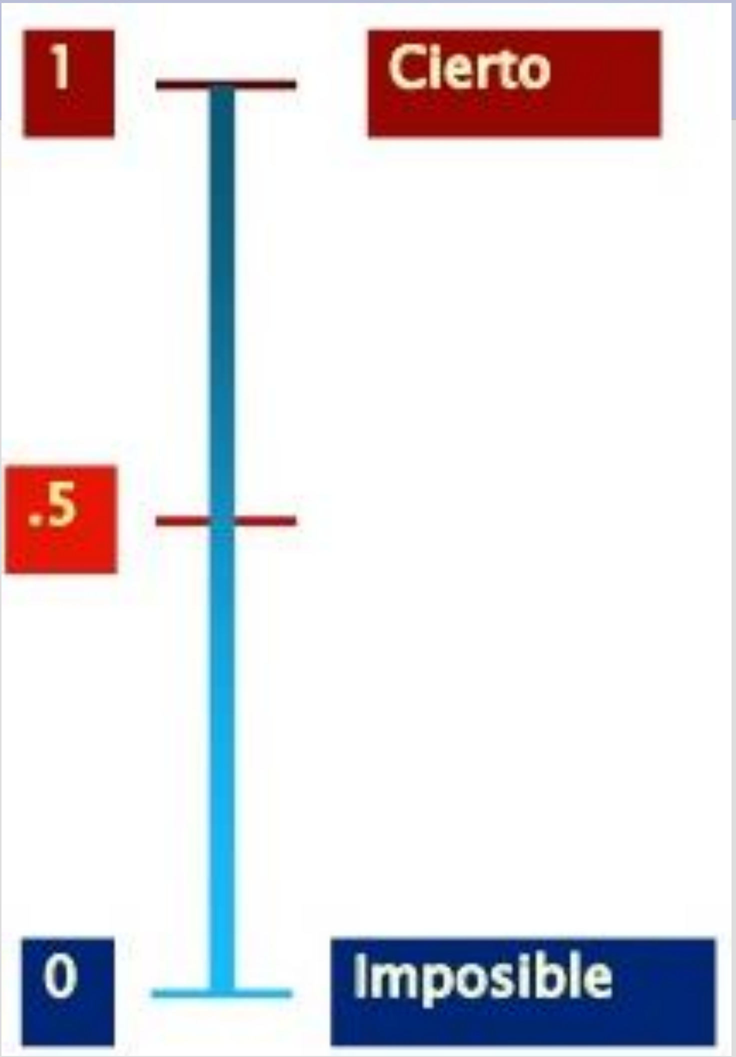
Facultad de Lenguas y Letras

08/04/2013

Cesar.Aguilar72@gmail.com

Definiendo el concepto de probabilidad

En la clase pasada estuvimos delimitando el concepto de **probabilidad**, el cual podemos entender como **una medida numérica que indica el grado de posibilidad de que un evento ocurra.**



Así, podemos fijar esta medida en una escala que se mueve entre dos polos: uno que indique nuestra plena seguridad en que tal evento ocurra, y otro en donde manifestamos la imposibilidad total de dicho evento.

Probabilidad subjetiva

Hay tres formas de hacer nuestro cálculo de probabilidad: una es por mera suposición, la otra es recolectando evidencia empírica, y finalmente, haciendo un cálculo estableciendo una serie de **condiciones** que, creemos, determinan el que ocurra o no el evento que analizamos.

En el primer caso tenemos una **probabilidad subjetiva**, y es una predicción que podemos lanzar sin más, p.e.: ver el cielo y decir que va a llover.

Probabilidad empírica (1)

En contraste, tenemos la **probabilidad empírica**:

Es una aproximación de la probabilidad por medio de la frecuencia relativa

– Se obtiene realizando un experimento un gran número de veces y observando las veces que un evento ocurre.

– Si *P(A)* es la probabilidad relativa de el evento A, entonces:

$$P(A) = \frac{\text{Número de veces que ocurre } A}{\text{Número de veces que se repite el experiemento}}$$

Probabilidad empírica (2)

Si consideramos la probabilidad empírica, podemos darnos cuenta de algo: conforme repetimos un experimentos varias veces, en algún momento parecerá que el evento que analizamos se volverá **regular**, mostrando así una **tendencia** que permita predecir, con un mínimo grado de error, si tal evento ocurre (o no) en un espacio muestral de mayor dimensión.

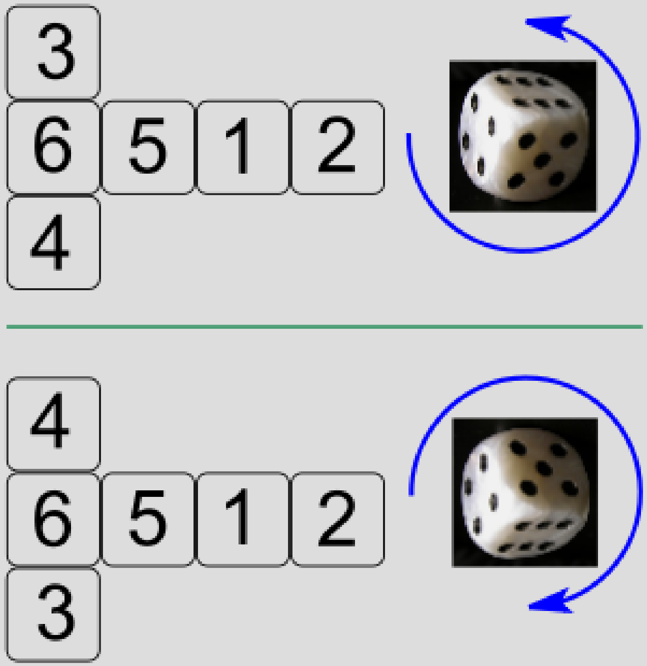
A este hecho se le conoce como la **ley de los grandes números**.

Probabilidad empírica (3)

Vamos a analizar el siguiente ejemplo para ver cómo operan los grandes números como indicios de una tendencia regular.

Supongamos que queremos determinar en cuántos lanzamientos de un dado podemos obtener un número que sea par (en concreto, 2, 4, 6). Pendemos entonces que nuestro evento A se define como:

$$A = \{2, 4, 6\}$$



Probabilidad empírica (4)

Establecido lo anterior, digamos que lanzamos el dado 20 veces, lo que nos arroja los siguientes resultados:

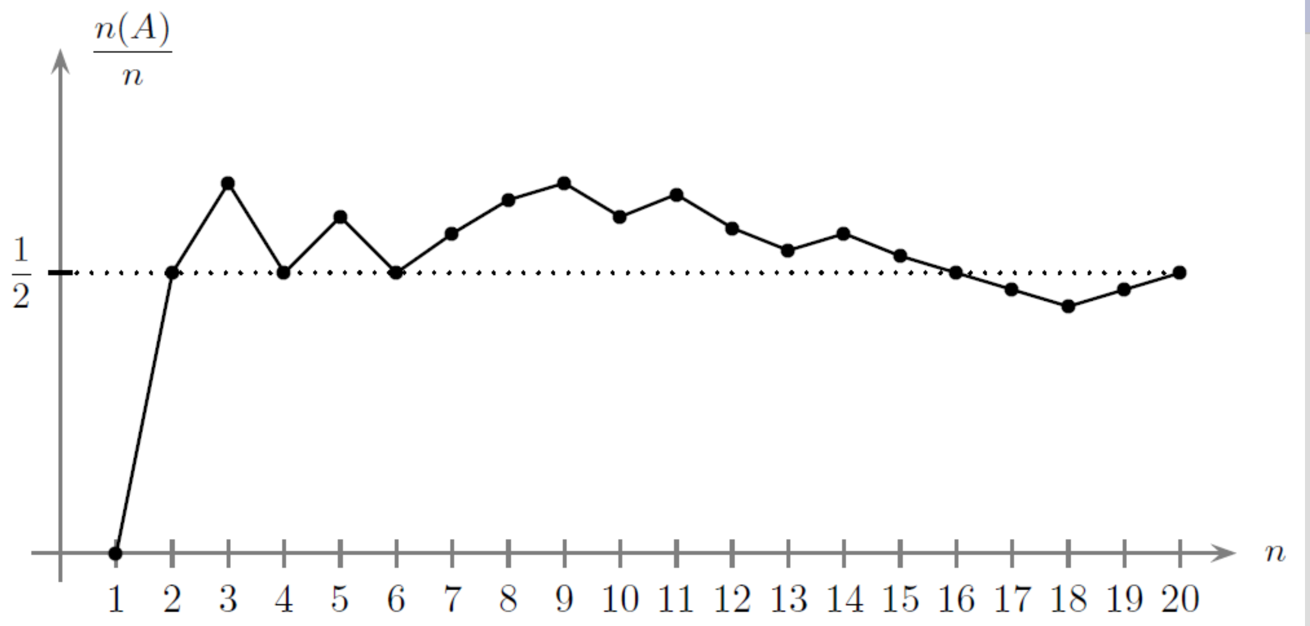
No.	Resultado	$n(A)/n$
1	3	$0/1$
2	6	$1/2$
3	2	$2/3$
4	1	$2/4$
5	4	$3/5$
6	6	$4/6$
7	3	$4/7$
8	4	$5/8$
9	2	$6/9$
10	5	$6/10$

No.	Resultado	$n(A)/n$
11	2	$7/11$
12	5	$7/12$
13	1	$7/13$
14	6	$8/14$
15	3	$8/15$
16	1	$8/16$
17	5	$8/17$
18	5	$8/18$
19	2	$9/19$
20	6	$10/20$

Lo que marca nuestra fracción es: dado un lanzamiento ***n***, ¿qué tan probable es que ocurra el evento ***A***, entre el total de lanzamientos ***n*** hechos? Si esto es así, ¿qué podemos observar?

Probabilidad empírica (4)

Para entender mejor esto, veamos la siguiente gráfica:



Regularidad estadística del cociente $\frac{n(A)}{n}$.

A grandes rasgos, lo que podemos decir es que a pesar de observar algunas variantes, parece que el dado tiende a mostrar un comportamiento regular: a un lanzamiento con un número par le sigue un número impar, fijando una probabilidad de 0.5, o sea ½.

Probabilidad clásica

Finalmente, tenemos el cálculo de probabilidad en los términos que postularon Pascal y Fermat, de tal suerte que la explicamos de la siguiente forma:

- Utilizaremos una *P* para denotar probabilidad
- Si *A* es un evento del espacio muestral, entonces *P(A)* se lee como probabilidad de que ocurra *A*.

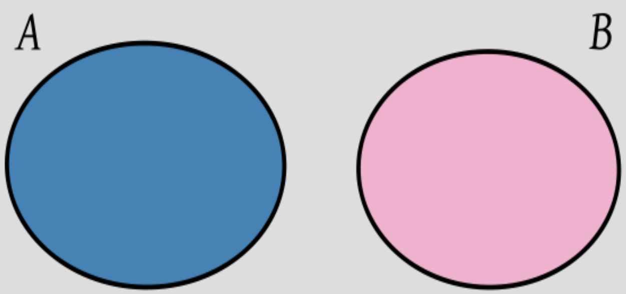
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

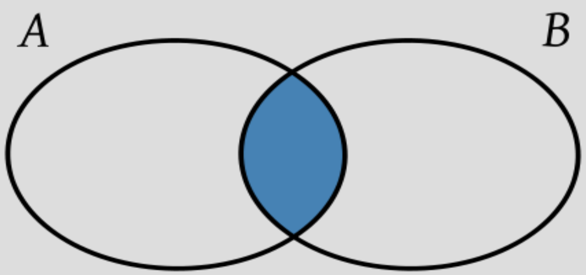
n(A) es el número de formas en que A puede ocurrir y n(S) es tamaño del espacio muestral

Eventos excluyentes/incluyentes (1)

Algo que podemos hacer considerando estos axiomas es deducir si dos eventos están relacionados o no, de tal forma que cuando ocurren podemos decir que **la realización de un evento condiciona la de otro**.

Para representar estas dos opciones, vamos a tomar en cuenta dos relaciones propias de la teoría de conjuntos: **disjunción** e **intersección.**





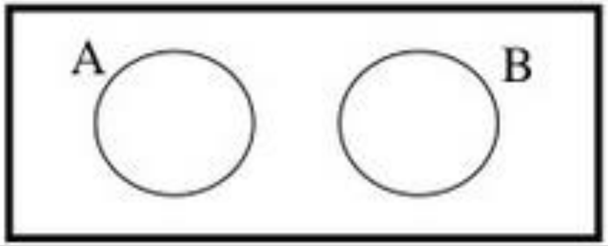
Eventos excluyentes/incluyentes (2)

Veamos el caso de la disjunción:

Se dice que dos **eventos** son **mutuamente excluyentes** si uno y sólo uno de ellos puede tener lugar en un mismo tiempo. Es decir o uno o el otro, pero no pueden suceder ambos al mimos tiempo.

Sean A y B dos eventos mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



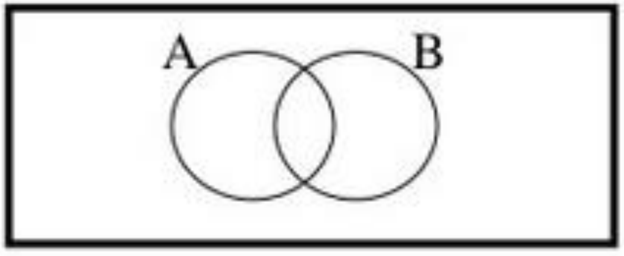
Eventos excluyentes/incluyentes (3)

Y en el caso de la intersección:

Sean los eventos A y B **mutuamente no excluyentes** y subconjuntos de un mismo espacio muestral S, entonces, la probabilidad de que ocurra el evento A o el evento B es:

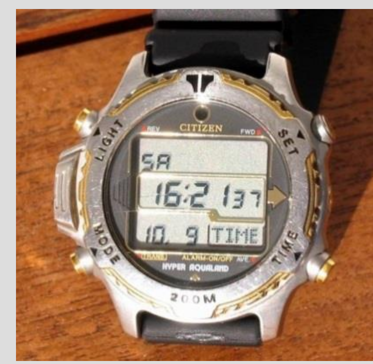
Sean A y B dos eventos mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Eventos excluyentes/incluyentes (4)

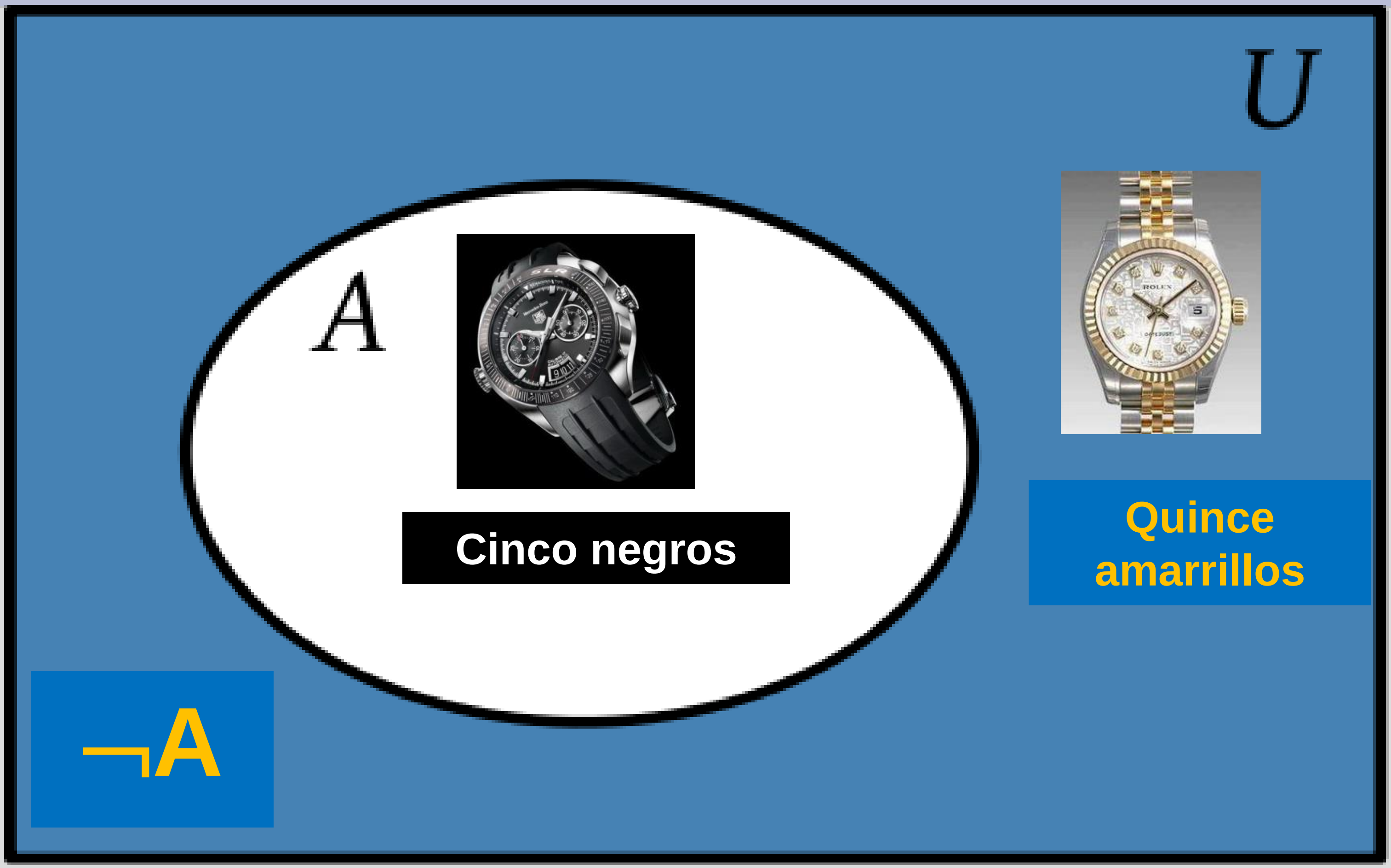
Para entender mejor esto, hagamos el siguiente razonamiento: supongamos que tenemos una colección de 20 relojes , de los cuales 5 son color negro, y 15 son amarillos.



Pregunta: recordando los diagramas de Venn, si decimos que los 5 relojes negros conforman el conjunto ***A***, ¿cuál es su complemento, esto es $\neg A$?

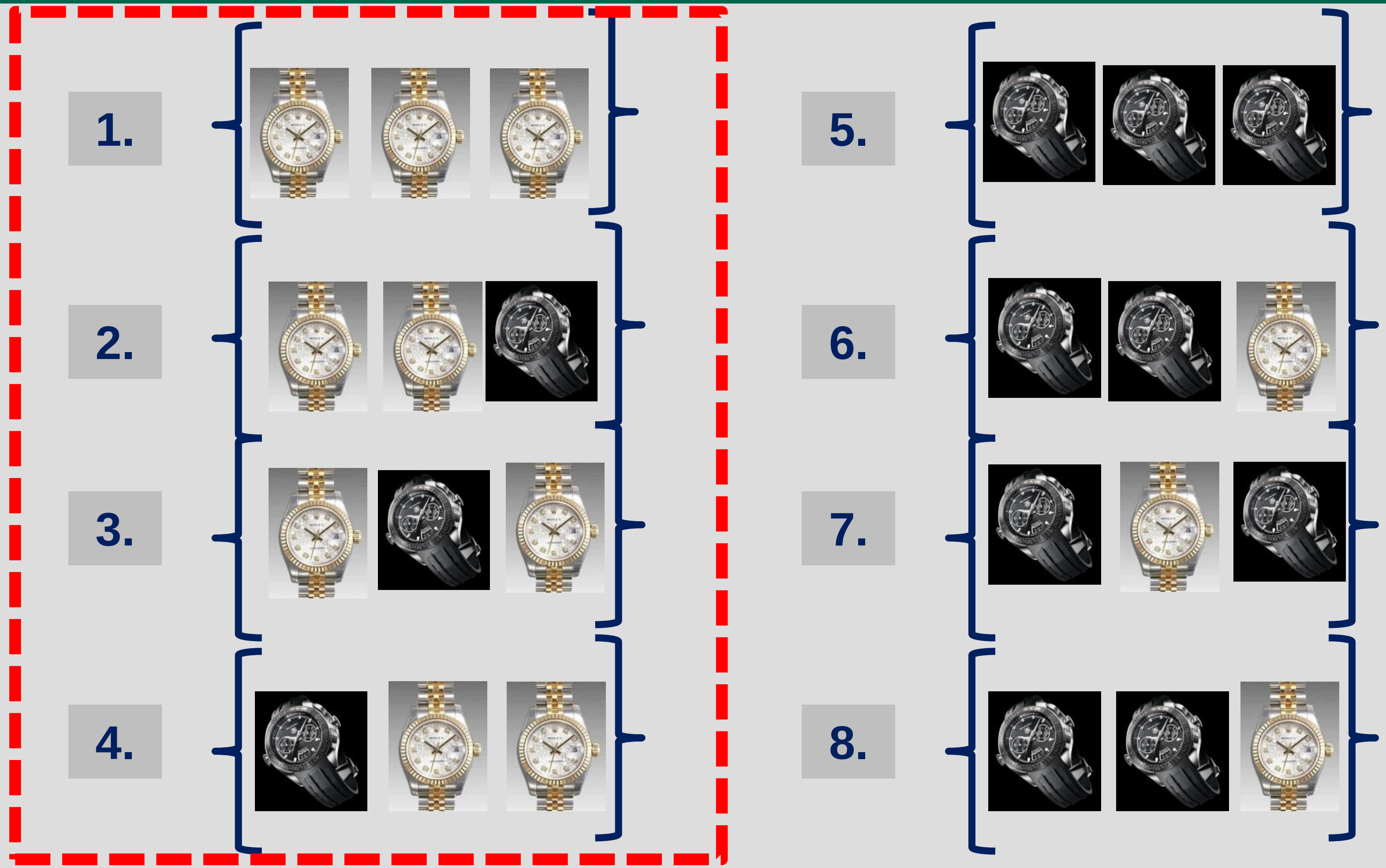
Eventos excluyentes/incluyentes (5)

La respuesta es la siguiente:



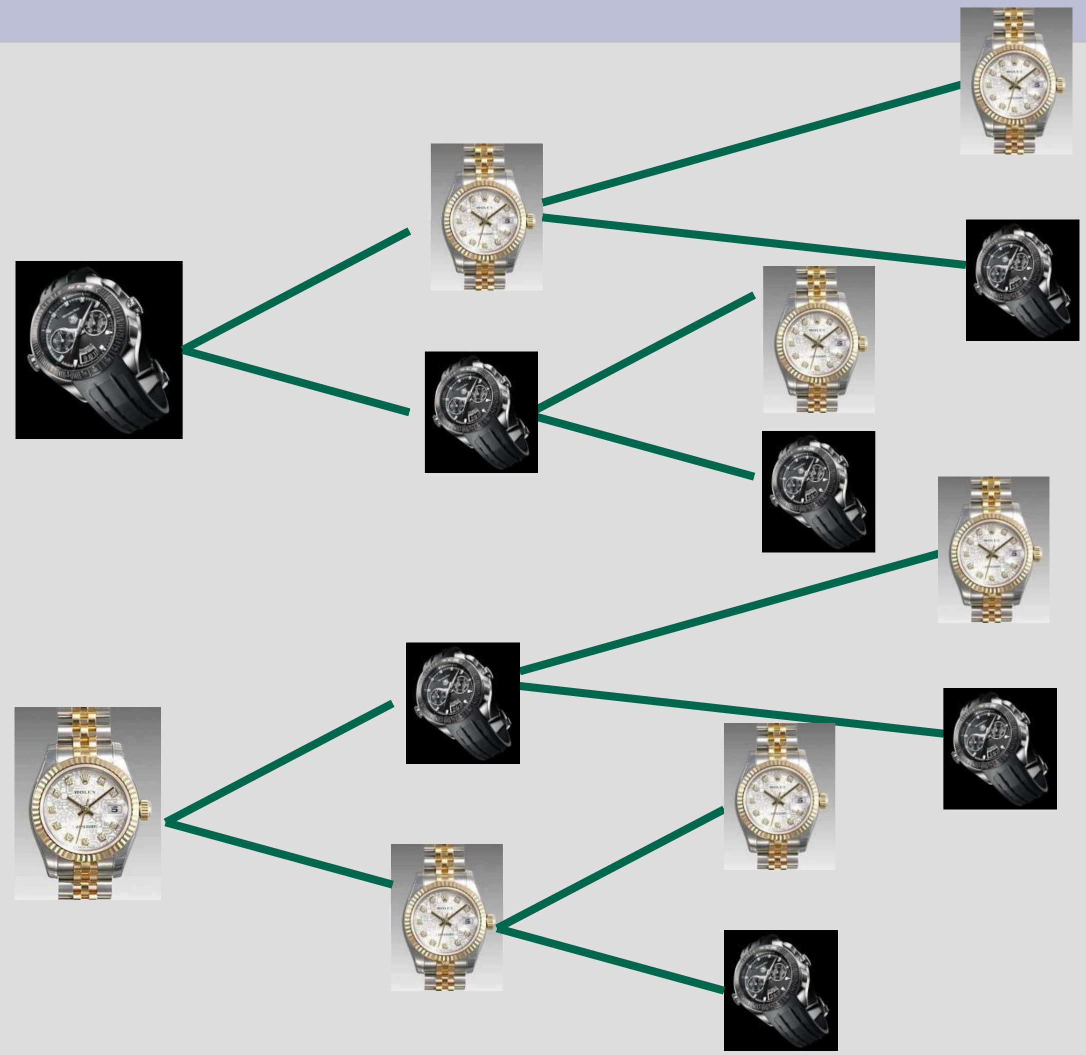
Eventos excluyentes/incluyentes (4)

Vamos a hacer el siguiente experimento: en 3 extracciones, queremos obtener a lo más uno color negro (esto es, que no obtengamos ningún negro, pero no más de uno). ¿Cuáles son las combinaciones que podemos esperar?



Eventos excluyentes/incluyentes (5)

También podemos representar nuestro conjunto de resultados posibles en un diagrama arbóreo, esto es:



Propiedades y axiomas (1)

Viendo los gráficos anteriores, podemos deducir algunas propiedades:

1. En nuestras 3 extracciones, la probabilidad de sacar 1 reloj negro es mayor o igual a 0, esto es:

$$P(A) \geq 0$$

Dado que A representa el conjunto de relojes negros, **entonces la probabilidad de que ocurra la extracción de un reloj negro va de cero (no sacar nada) hasta uno como máximo (por tanto, es mayor a cero).**

Propiedades y axiomas (2)

2. Ahora, si meto la mano 3 veces, la probabilidad de sacar 3 relojes con un color específico, sea negro o amarrillo, es siempre igual a 1, esto es:

$$P(\Omega) = 1$$

Esto equivale a pensar que cada vez que metemos la mano en la urna, por lo menos estamos seguros que siempre vamos a sacar un reloj (y en el caso de nuestro experimento, vamos a sacar tres relojes).

Propiedades y axiomas (3)

Dado lo anterior, podemos formular el siguiente **axioma**:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Lo que quiere decir que *la imposibilidad de que el evento A no ocurra es menor o igual a su probabilidad de ocurrir, en tanto que tal probabilidad es menor o igual a que sea considerado un evento seguro.*

Propiedades y axiomas (4)

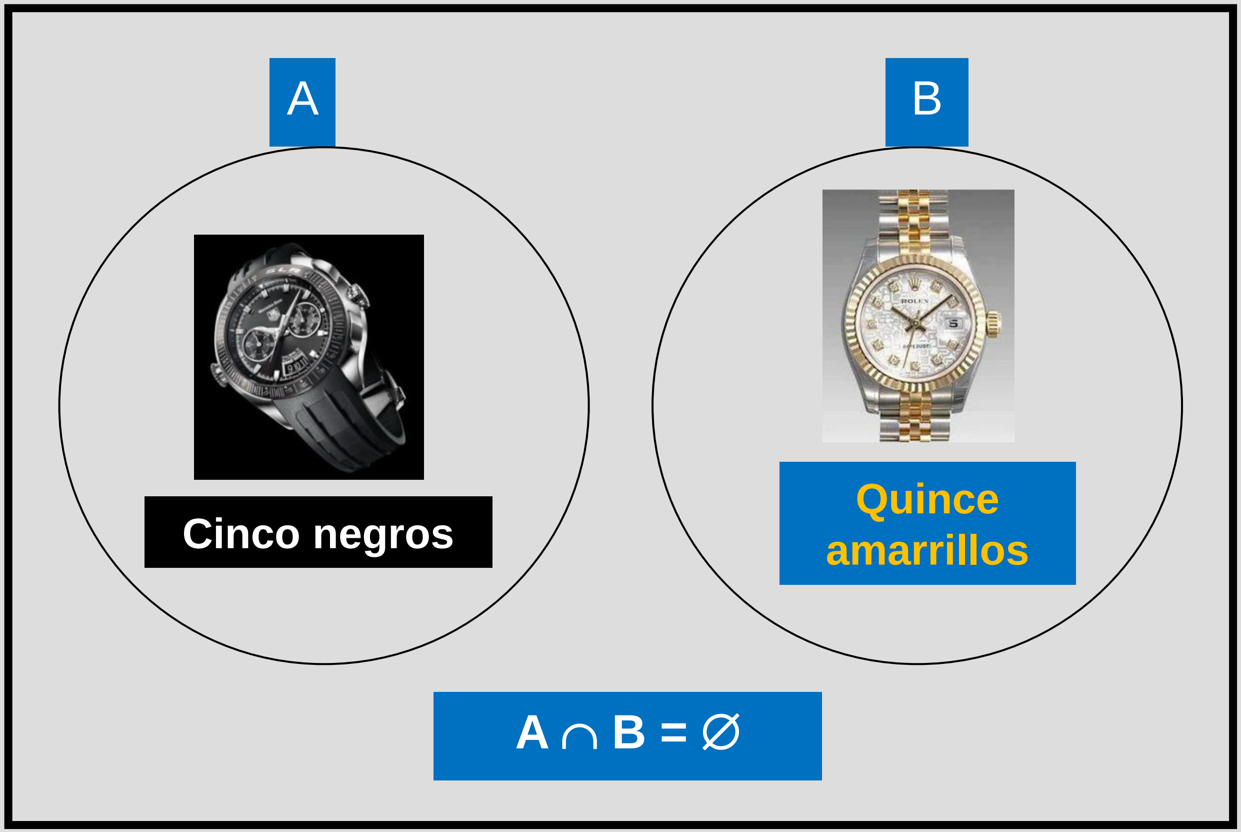
Otro axioma que podemos inferir a partir de estas relaciones es el llamado **principio de adición**, y se entiende de la siguiente forma: la suma total de los relojes que están en los conjuntos **A** y **¬A** nos debe de dar 20 relojes (no más, no menos). Traduciendo esto en probabilidades de eventos lo que queremos decir es que:

$$P(A \cup \neg A) = P(A) + (\neg A) = 1$$

Esto quiere decir que ***la unión de las probabilidades del conjunto de eventos A con su complemento es igual a la suma de las probabilidades de ambos conjuntos, lo cual debe ser equivalente a 1*.**

Probabilidades independientes (1)

Ahora bien, reformulando nuestro ejemplo, supongamos que los relojes amarillos (que son el complemento del conjunto **A**) conforman un conjunto **B**. El esquema que tendríamos es el siguiente:



Probabilidades independientes (2)

Y la fórmula que tenemos para calcular sus probabilidades es:

$$P\ (A \cup B) = P\ (A) + P\ (B)$$

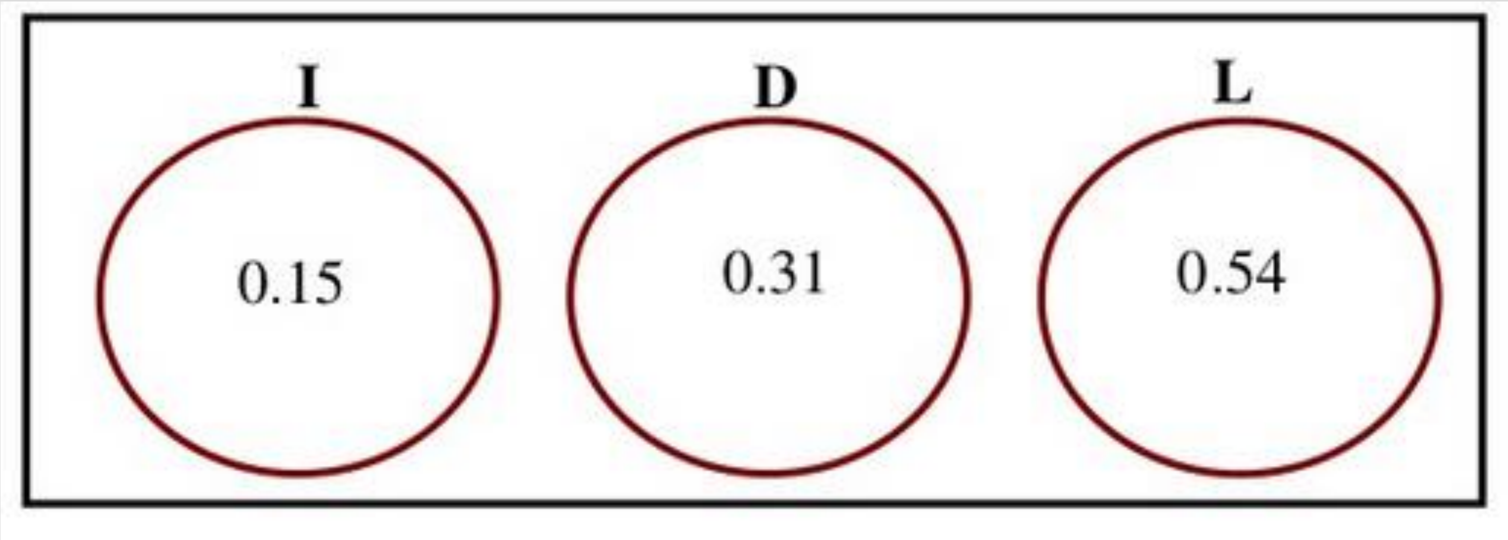
Esto quiere decir que ***la probabilidad la unión de los conjuntos A y B es igual a la suma de la probabilidad de A y la probabilidad de B*.**

Si esto es así, lo que estamos suponiendo es que entre los conjuntos **A** y **B no tienen elementos en común, aunque forman parte de un mismo universo.** En otras palabras, nuestro conjunto Universal son 20 relojes, pero los separamos a partir de un rasgo: su color, lo que nos permite generar dos conjuntos específicos.

Probabilidades independientes (3)

Cuando dos eventos se excluyen mutuamente (p.e., sacar un solo reloj negro o amarillo, pero no dos), da lugar a lo que se conoce como **probabilidades independientes**. Para entender esto, veamos el siguiente ejemplo:

Una encuesta sobre el tránsito demuestra que en cierta intersección, la probabilidad de que los vehículos den vuelta a la izquierda es de 0.15, de 0.31 si dan la vuelta a la derecha, y de 0.54 si siguen de largo.



Probabilidades independientes (4)

Preguntas:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que un auto gire a la derecha o la izquierda?

2. ¿Cuál es la probabilidad de que gire a la derecha o se siga de largo?

3. ¿Cuál es la probabilidad de que se estacione justo en el cruce?

Respuestas:

1. 0.46
2. 0.85
3. 0

Probabilidades independientes (5)

Lo que podemos suponer entonces es que entre los tres eventos posibles (girar a la izquierda o a la derecha, o seguir de frente) **no existe ninguna relación entre sí**.

A lo más, lo que observamos es que la mayoría de los conductores opta por seguirse de frente, y en el caso de que alguno optara por girar, la tendencia es a preferir la derecha sobre la izquierda.

Probabilidades independientes (6)

Consideremos otro ejemplo de eventos independientes: tenemos dos conjuntos de palabras claramente delimitados: uno consta de preposiciones y el otro de conjunciones:

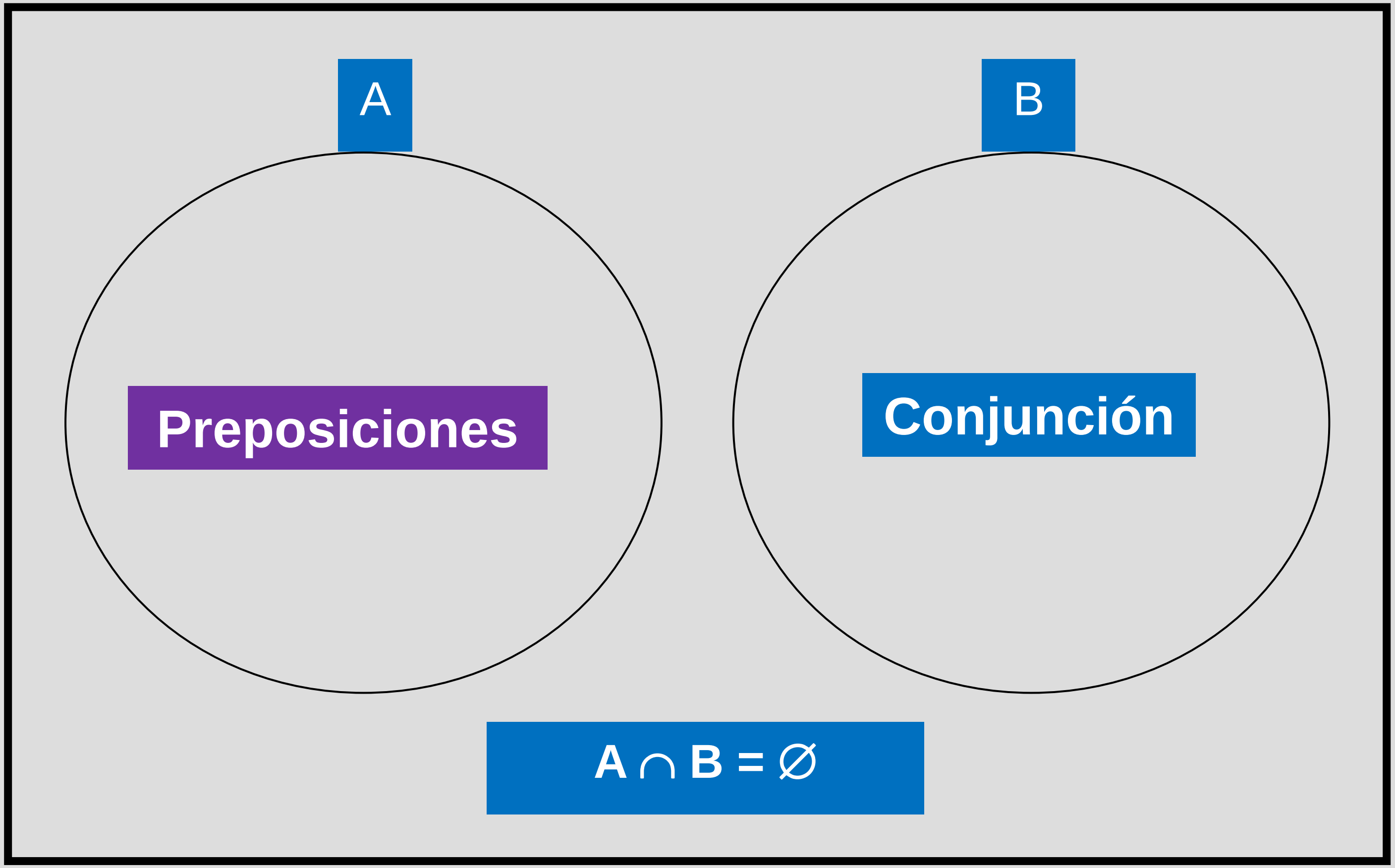
Preposición (A) = {*a, ante, bajo, cabe, con, contra, de, desde, durante, en, entre, hacia, hasta, mediante, para, por, según, sin, so, sobre, tras, versus*, *vía*}

Conjunción (B) = {y, e, ni, que}

Pregunta: en el contexto de una oración, si aparece una conjunción, ¿qué tan probable es que siga una preposición?

Probabilidades independientes (7)

Viendo las cosas de otra forma: lo que queremos deducir es si hay una intersección en donde se cruce el conjunto de las preposiciones con el de las conjunciones.



Probabilidades independientes (8)

De entrada, podemos pensar que entre una conjunción y una preposición no hay una relación de dependencia clara, de tal modo que si contabilizamos todos los casos en donde esto ocurre, quizá no obtengamos suficiente información como para reconocer esta intersección, salvo algunas frases *(p. e. ni de uno ni de otro, y de repente, y desde entonces…).* Si esto es así, parece que tendríamos que cruzar todas las probabilidades de ocurrencia de una conjunción con todas las probabilidades de una preposición, esto es:

$$P\,(A \cap B) = P\,(A)P(B)$$

Probabilidades condicionales (1)

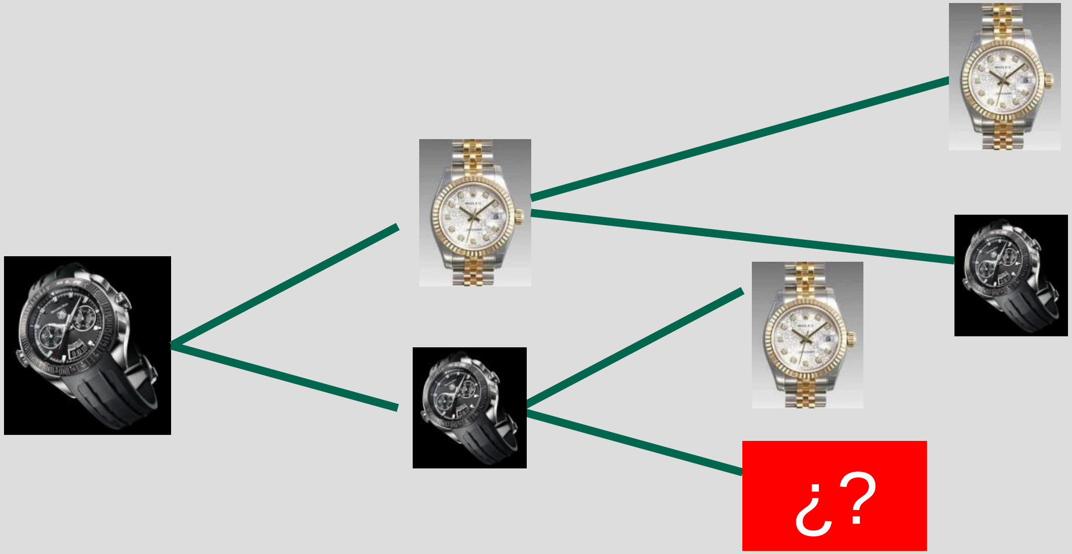
Veamos ahora el caso contrario: supongamos que los eventos **A** y **B** tienen un punto de cruce entre sí, de tal manera que forman una intersección.

Si quisiera calcular de probabilidad dos eventos no disjuntos **A** y **B**, **debo excluir su punto de intersección**, esto es:

$$P\ (A \cup B) = P\ (A) + P\ (B) - P(A \cap B)$$

Probabilidades condicionales (2)

Volviendo a la extracción de relojes, si sacara un reloj negro del conjunto **A**, y me quedo con 4, ¿conservo las mismas probabilidades para realizar mi experimento, o éstas se ven afectadas por tal decisión?



Probabilidades condicionales (4)

Cuando realizamos este experimento, suponiendo que tenemos las mismas condiciones entre la primera y la segunda extracción, los escenarios que tenemos son:

Negros	Amarillos	P(negros)	P(amarillos)	# Experimento
5	15	5/20	15/20	Exp. 1 = 1N + 2 A
4	13	4/17	13/17	Exp. 2 = 1N + 2 A
3	11	3/14	11/14	Exp. 3 = 1N + 2 A

A este hecho de forzar las probabilidades de los resultados esperados en cada experimento es lo que llamamos **condicionalidad**, lo que da pie a las llamadas **probabilidades condicionales.**

Probabilidades condicionales (5)

Una forma de definir las probabilidades condicionales es la siguiente:

– Sean A y B dos eventos estadísticamente dependientes, entonces, la probabilidad condicional de A dado B, denotado por P(A / B), es la probabilidad de que suceda A dado que se sabe que el evento B ocurrió.

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

P(A/B) = probabilidad de que ocurra el evento A, dado que el evento B ya ocurrió.

P(A∩B) = probabilidad de que ocurra A y B

P(B) = probabilidad de que ocurra el primer evento B.

Probabilidades condicionales (6)

Otra forma de decirlo es:

– Sean A y B dos eventos independientes, entonces, la probabilidad de que suceda A dado que se sabe que el evento B ocurrió, se denomina probabilidad condicional de A dado B, denotada por P (A/B).

$$P(A/B) = P(A)$$

Probabilidades condicionales (7)

Veamos de nuevo un ejemplo lingüístico: tenemos de nueva cuenta el conjunto de preposiciones, pero ahora queremos saber si los verbos *referir*, *ir* y *salir* tienen alguna preferencia por una de estas preposiciones:

Preposición (A) = {*a, ante, bajo, cabe, con, contra, de, desde, durante, en, entre, hacia, hasta, mediante, para, por, según, sin, so, sobre, tras, versus*, *vía*}

Verbos (B) = {referir, ir, salir}

Pregunta: si la respuesta es ***sí***, ¿podrían considerar este caso como probabilidades condicionales? ¿Por qué?

Gracias por su atención

Blog del curso:

http://cesaraguilar.weebly.com/meacutetodos-y-teacutecnicas-de-investigacioacuten-cuantitativa.html