PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

FACULTAD DE LETRAS

Métodos y técnicas de investigación cuantitativa

César Antonio Aguilar

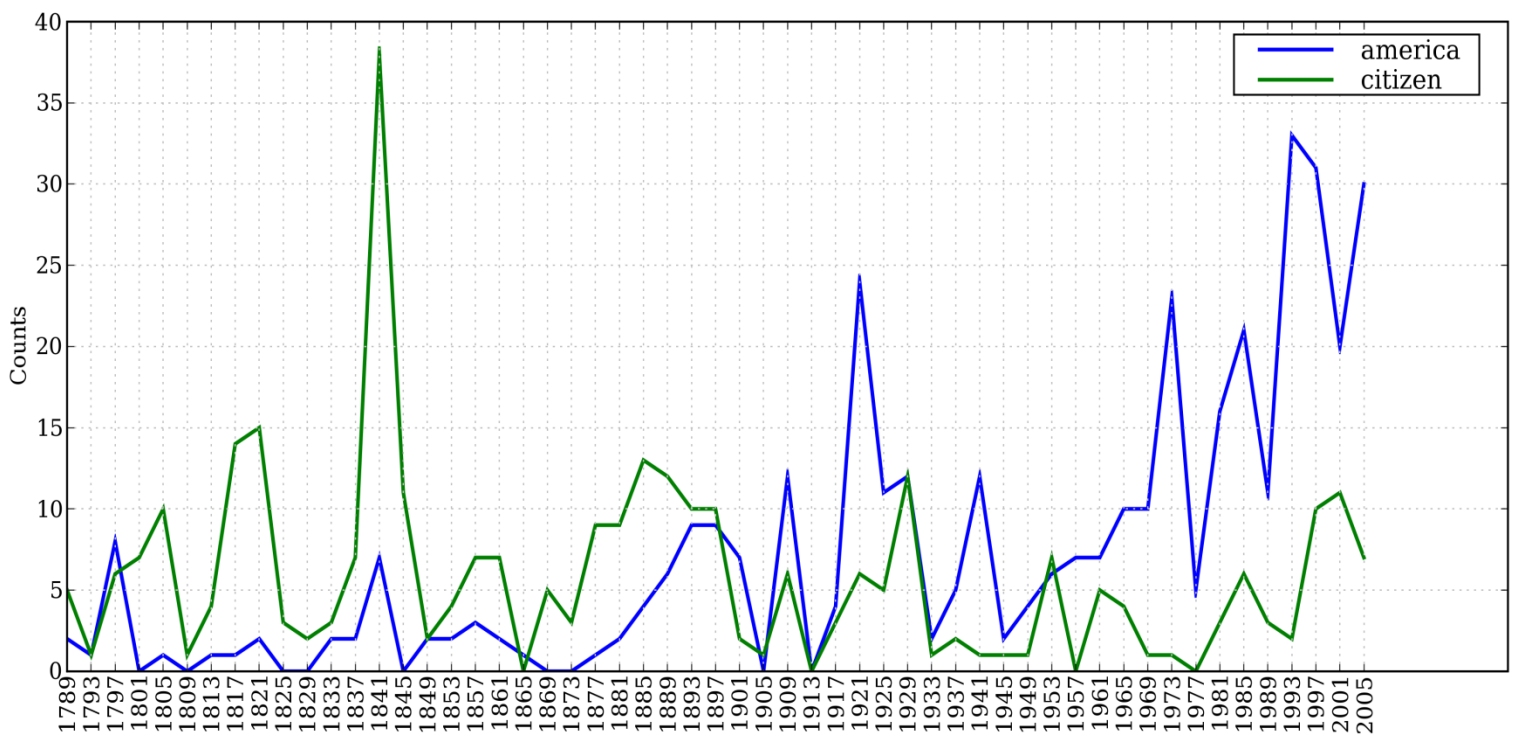
Facultad de Lenguas y Letras

01/04/2013

Cesar.Aguilar72@gmail.com

Estadística y probabilidad: ¿qué son? (1)

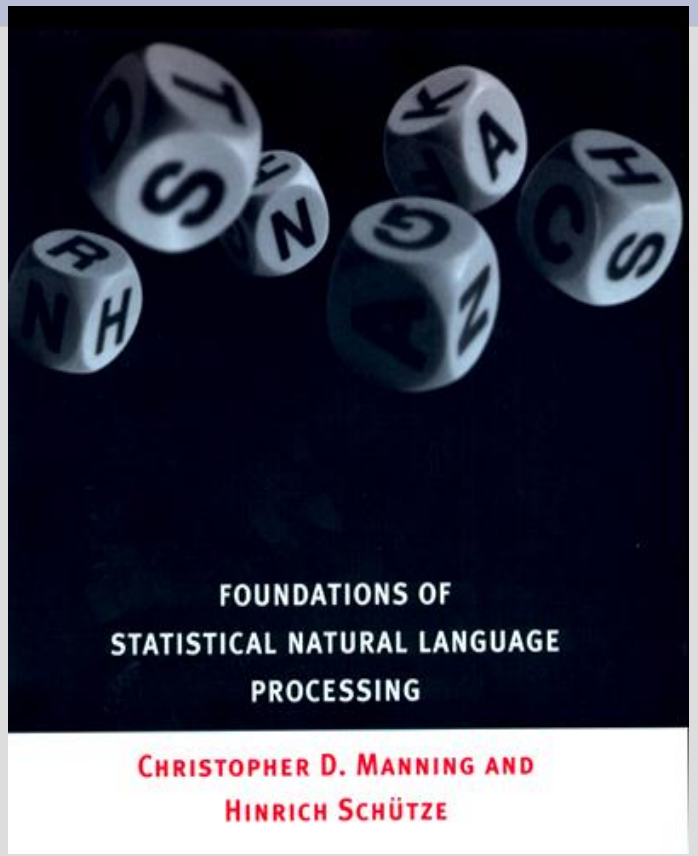
Vamos a retomar y profundizar en estos dos conceptos, con miras a entender qué es lo que queremos aprender en este curso. Así, la primera pregunta que pudiéramos hacernos es: ¿qué es lo que debo entender por los términos **estadística** y **probabilidad**? ¿Se refieren a lo mismo, o hay diferencias? ¿Cuál es su fin, y qué relación tienen con los estudios lingüísticos?



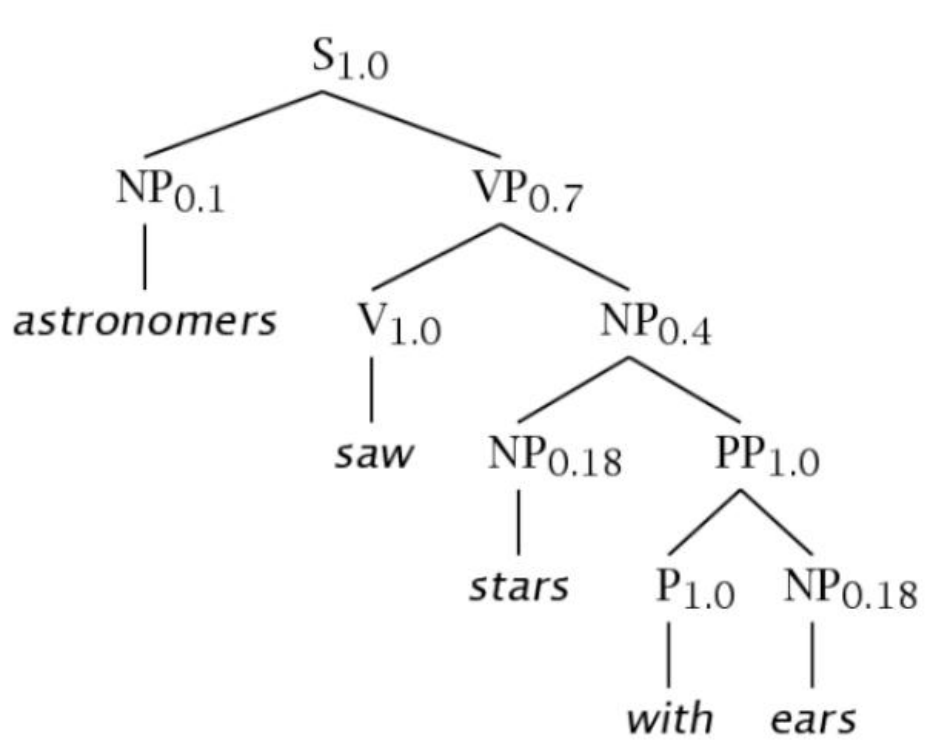
Estadística y probabilidad: ¿qué son? (2)

En breve, podemos definir a la **estadística** como una ciencia formal, que se enfoca en el desarrollo y uso de métodos y técnicas para analizar datos obtenidos a partir de un experimento, los cuales permiten sostener (o no) una hipótesis contrastándola con su evidencia empírica.

Así, la estadística nos ayuda a establecer una **relación armónica** entre hipótesis y datos, de tal modo que una hipótesis resulta pertinente justo porque hay un conjunto de datos que la soporta de manera convincente.



Estadística y probabilidad: ¿qué son? (3)



Por su parte, podemos definir a la **probabilidad** como una línea de investigación de las matemáticas, la cual se enfoca en el análisis de eventos en donde está involucrado el **azar**, esto es: si la ocurrencia de un fenómeno se debe a que se trata de un caso fortuito, o a una relación determinada que es visible a través de una serie de experimentos guiados por un conjunto de hipótesis.

¿Cuál es su origen? (1)

El interés por el estudio del azar se puede rastrear desde tiempos antiguos, por lo menos desde la cultura sumeria (3500 A.C.), y ha estado estrechamente relacionado a los juegos de azar.

La cuestión a tratar aquí es la siguiente: ¿existe alguna manera de predecir quién puede ganar o perder un juego de azar, considerando todos los elementos que participan en dicho juego: piezas del juego, reglas, combinaciones, números de jugadas, etc.?

¿Cuál es su origen? (2)

Si bien estos descubrimientos han sido importantes, la mayoría de los historiadores de las matemáticas prefieren ubicar el nacimiento de esta teoría en el s. XVII, a partir de una serie de experimentos que realizaron en colaboración **Blaise Pascal** y **Pierre de Fermat**, para resolver una cuestión relacionada con los juegos de azar.

Blaise Pascal (1623-1662).

Pierra de Fermat (1601-1665).

¿Cuál es su origen? (3)

La anécdota detrás de estas preguntas es la siguiente: en una ocasión, un hombre llamado Antoine Gombaud de Méré (1607-1684), quien era aficionado a los juegos de azar, logró contactar a Pascal y Fermat, con el fin de plantearles un reto matemático, formulado los siguientes términos:

Supóngase que dos jugadores acuerdan jugar un determinado número de partidas, digamos, jugar al mejor de siete, y se les interrumpe antes de que puedan terminar la tanda. ¿Cómo debería repartirse el dinero apostado si, por ejemplo, uno ha ganado cinco partidas y el otro cuatro?

¿Cuál es su origen? (4)

Las deducciones que desarrollaron Fermat y Pascal para resolver esta duda los llevaron a relacionar varios fenómenos:

Procesos combinatorios: el hecho de que alguno de los jugadores gane o pierda se relaciona con series de combinaciones entre las juagadas que ya ganaron, y las posibilidades que al menos uno de los dos tiene de ganar (esto es, el que más se acerca al triunfo).

Relación condicional: la pregunta de la Méré no intenta adivinar quién será el ganador (o en su defecto, qué hace falta para ganar el juego), sino más bien establece una **condición:** la repartición de la apuesta entre dos jugadores está determinada por el número de jugadas ganadas que llevan, dentro de una serie de 7 juegos.

¿Cuál es su origen? (5)

Considerando las 2 cuestiones anteriores, una definición que se puede dar sobre lo que es la probabilidad es la siguiente:

La probabilidad es el conjunto de todas las posibilidades que tenemos de obtener un resultado, en función del número total de posibles maneras que tenemos para obtener tal resultado.

Esta definición se la debemos a **Gerolamo Cardamo**, quien vislumbró el problema antes que Pascal y Fermat.

Gerolamo Cardamo (1501-1576).

¿Cuál es su origen? (6)

Siguiendo el razonamiento planteado por Cardano, Fermat propone la siguiente solución:

Si el Jugador A lleva ganadas 5 partidas de 7, en tanto que el Jugador B lleva 4 de 7, A necesita 2 jugadas más para llegar a 7; en tanto que B requiere 3 para llegar al mismo número…, y de hacerlo, necesitará una más para desempatar con A.

Por ello, pongamos como margen un máximo de 4 jugadas para que cualquiera de los dos gane el juego.

¿Cuál es su origen? (7)

Ahora bien, dado ese margen de 4 jugadas, ¿cuáles son las combinaciones que requieren A y B para ganar el juego? De acuerdo con Fermat, el conjunto total de combinaciones son:

$$(a,a,a,a),(a,a,a,b),(a,a,b,a),(a,b,a,a),(b,a,a,a),(a,a,b,b),(a,b,a,b),(a,b,b,a),$$

$$(b,a,a,b),(b,a,b,a),(b,b,a,a),(a,b,b,b),(b,a,b,b),(b,b,a,b),(b,b,b,a),(b,b,b,b)$$

Por convención, establezcamos que las jugadas que representa *a* son aquellas que gana el jugador A, en tanto que las que representa *b* son las que gana el jugador B.

¿Cuál es su origen? (8)

El total de combinaciones dentro de estas 4 jugadas es de 16. Ahora, dentro de estas 16 jugadas, el Jugador A puede optar por 11 que le permiten ganar la partida (recordemos, está a dos juegos de triunfar). Las combinaciones ganadoras para A son:

1. {a, a, a, a} 2. {a, a, a, b} 3. {a, a, b, a} 4. {a, b, a, a}
5. {b, a, a, a} 6. {a, a, b, b} 7. {a, b, b, a} 8. {b, b, a, a}
9. {b, a, a, b} 10. {b, a, b, a} 11 {a, b, a, b}

Por su parte, B sólo puede optar por 5 combinaciones:

1. {b, b, b, b} 2. {b, b, b, a} 3. {b, b, a, b} 4. {b, a, b, b}
5. {a, b, b, b}

¿Cuál es su origen? (9)

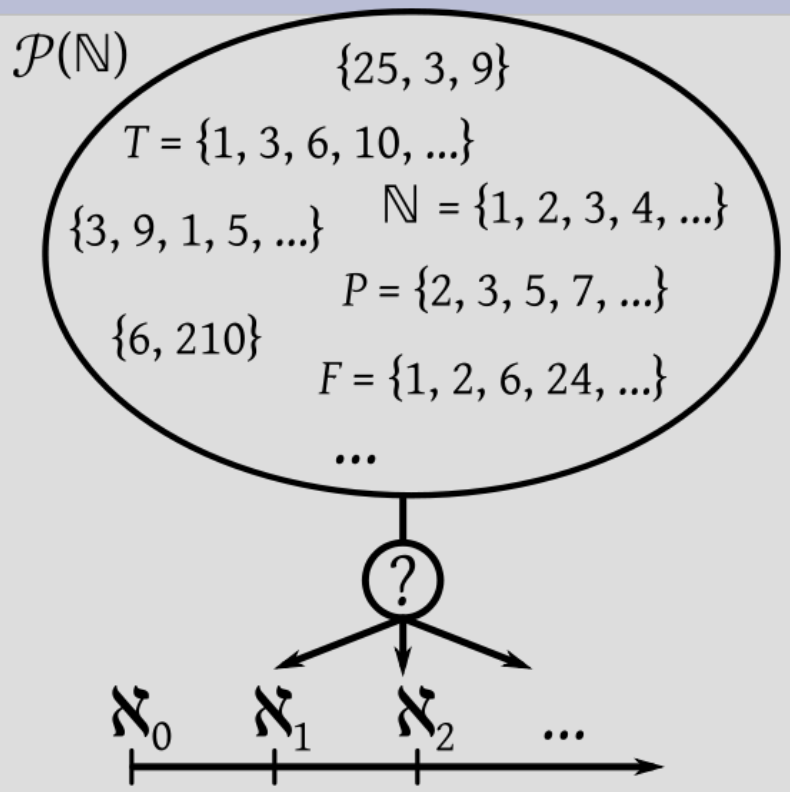
Finalmente, para establecer el margen de probabilidad que tienen ambos jugadores para ganar la partida completa en 4 juegos, considerando que el jugador A lleva ventaja sobre el jugador B, hacemos el siguiente cálculo:

Jugador A: 11/16 = 0,69

Jugador B: 5/16 = 0,31

Así, la repartición de la apuesta podría ser del siguiente modo: si ambos jugadores ponen 50 monedas de oro cada uno, de modo que la suma total da 100 monedas, el jugador A tiene derecho a 69 monedas, porque es el que estuvo más cerca de ganar; en contraste, el jugador B tiene derecho a 31 monedas, dado que está más alejado del triunfo en comparación con A.

Probabilidad y teoría de conjuntos



En la clase pasada, dijimos que el cálculo de probabilidades puede ser entendido en términos de una relación de conjuntos, en concreto una relación de **intersección**.

¿Por qué puede ser entendida la probabilidad en estos términos? Porque la teoría de conjuntos permite estudiar el comportamiento que muestran colecciones de objetos, del tal forma que tales comportamientos son deducibles a partir de relaciones y reglas básicas.

Teoría de conjuntos (1)

La teoría de conjuntos es una rama de las matemáticas desarrollada, principalmente, por George Cantor

A grandes rasgos, por conjunto se puede entender una colección de objetos con ciertas características o propiedades. El número de objetos puede ir desde dos hasta infinito.

Una teoría de conjuntos, en este sentido, trata de describir y analizar:

1. ¿Cuáles son las propiedades de caracterizan a los objetos que forman un conjunto?
2. ¿Bajo qué condiciones puede determinarse que un objeto *X* pertenece a un conjunto *Y* o no?

George Cantor (1845-1918).

Teoría de conjuntos (2)

Teniendo en cuenta entonces que un conjunto es una colección de objetos, podemos establecer algunas relaciones básicas:

Pertenencia: se dice que un objeto x pertenece a un conjunto C si x es realmente parte de los objetos que lo conforman: $x \in C$.

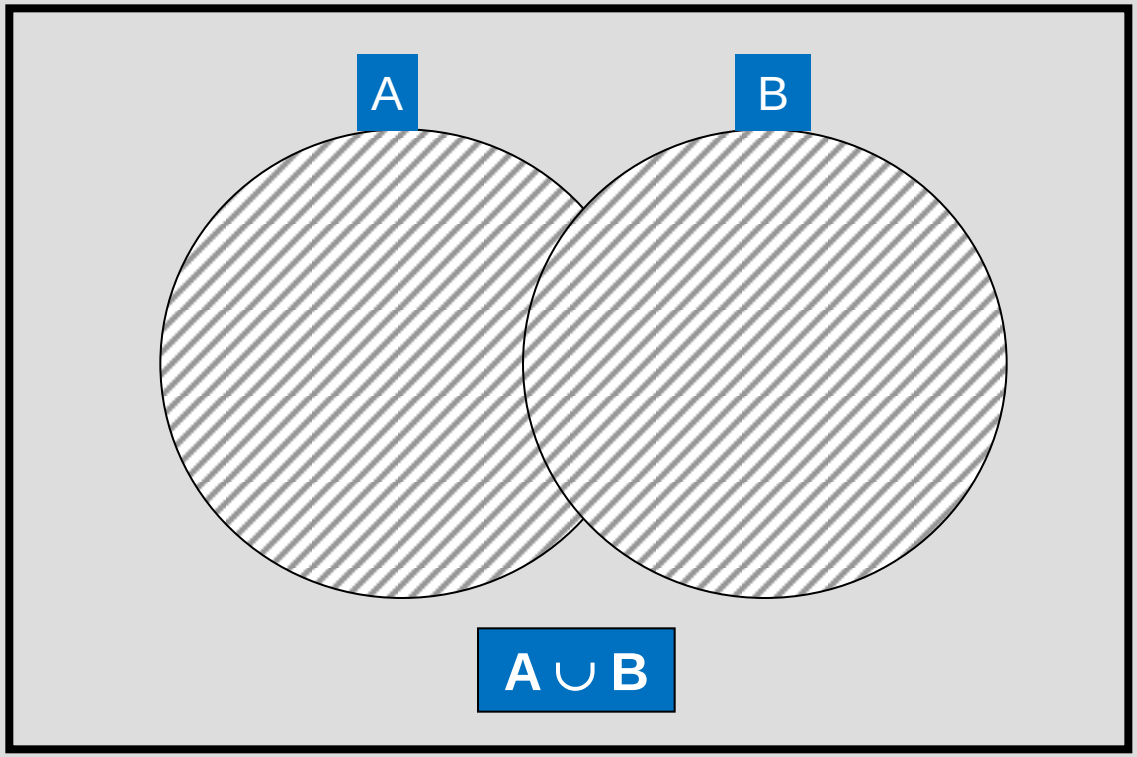
Igualdad: Dos conjuntos A y B son iguales si tienen exactamente los mismos elementos: $A = B$.

Inclusión: Un conjunto como A puede ser parte de otro conjunto B, en el caso de A comparta los mismos elementos que B: $A \subseteq B$.

Teoría de conjuntos (3)

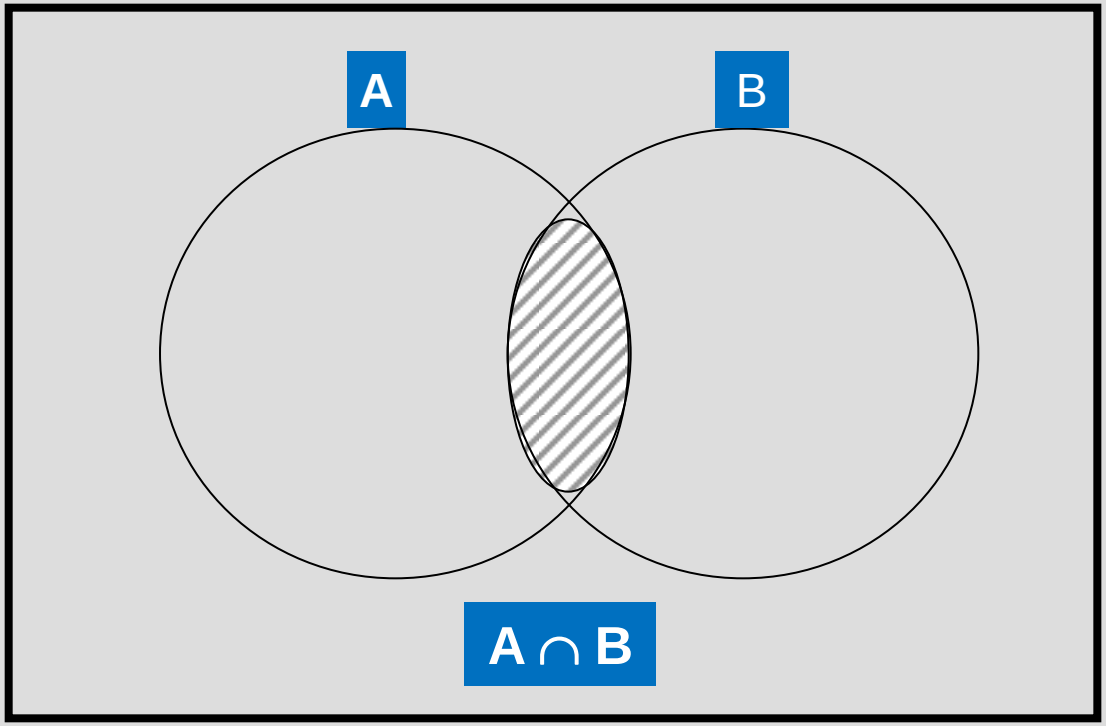
A las relaciones anteriores, añadimos una serie de **operaciones** :

Unión de conjuntos: cuando dos conjuntos A y B comparten la totalidad de sus objetos se considera que establecen una unión, esto es $\{x \mid x \in A$ o bien $x \in B\}$.



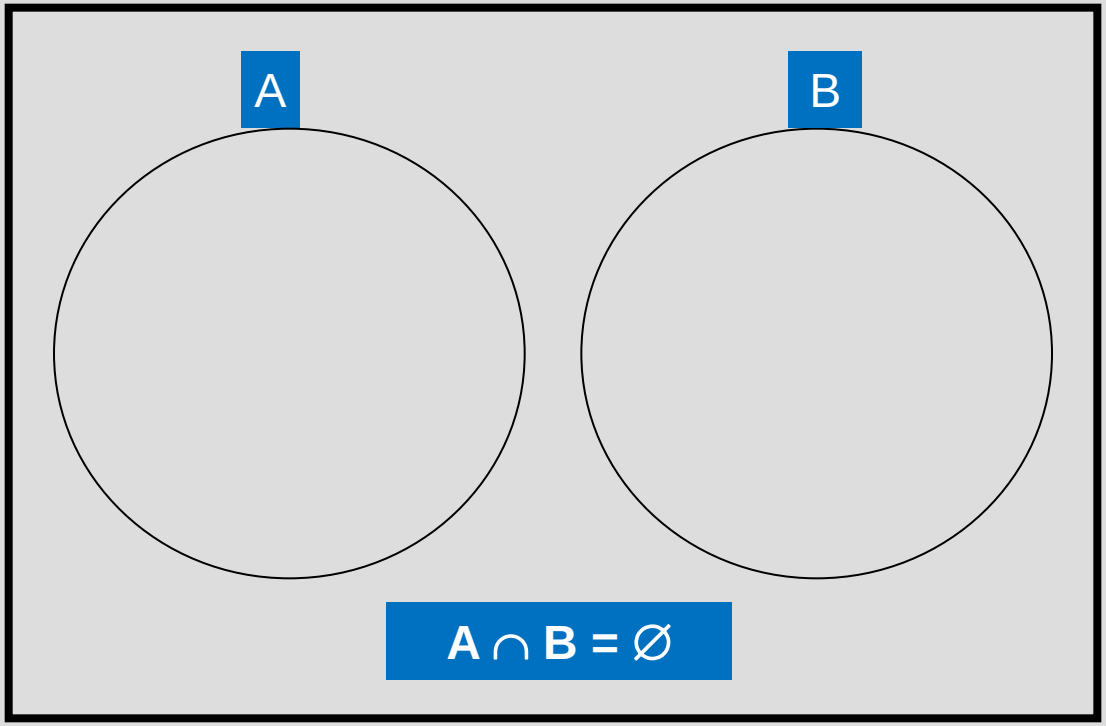
Teoría de conjuntos (4)

Intersección de conjuntos: dos conjuntos A y B comparten una parte de la totalidad de sus objetos, esto es $\{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$.



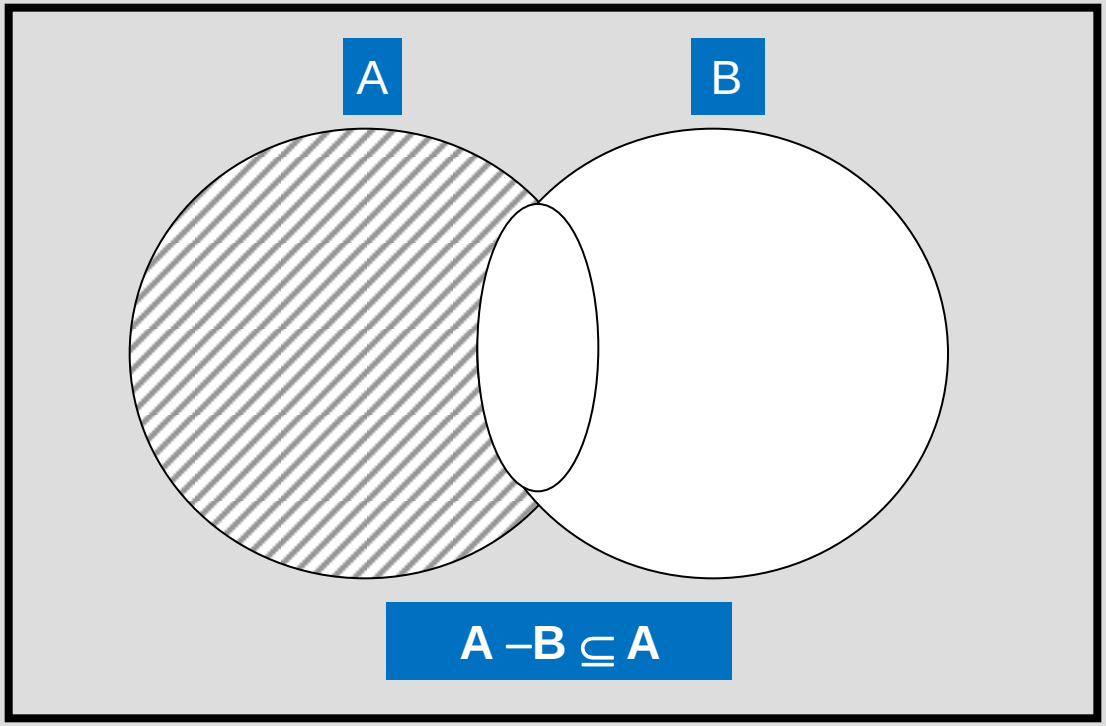
Teoría de conjuntos (5)

Conjuntos disjuntos: dos conjuntos A y B no tienen ningún objeto que compartir, esto es $\{A \cap B = \varnothing\}$.



Teoría de conjuntos (6)

Diferencia entre conjuntos: los objetos que aparecen en el conjunto A y que no aparecen en el conjunto B, es decir: $\{A - B \subseteq A\}$:



Teoría de conjuntos (7)

Otro rasgo que podemos considerar para definir un conjunto es su **cardinalidad**, esto es, la cantidad de objetos que conforman a tal conjunto. Esto se representa como |C|, lo cual se entiende como *el cardinal del conjunto C*. Ejemplos de cardinalidad son:

A = {el, libro, blanco} B = {α, β, γ, δ, ε} C = {{1}, 1, 2, {1,2,3}}

|A| = 3 |B| = 5 |C| = 4

Teoría de conjuntos (8)

Partes de un conjunto: si *{a, b, c}* son objetos de un conjunto *A*, ¿Cuántas combinaciones pueden generarse? El total de combinaciones conforma los subconjuntos del conjunto A. La relación *parte de un conjunto* se representa con el símbolo $\wp$:

$$\wp(\{a,b,c\}) \stackrel{def}{=} \left\{ \begin{array}{ccc} & \{a,b,c\} & \\ \{a,b\} & \{a,c\} & \{b,c\} \\ \{a\} & \{b\} & \{c\} \\ & \{\,\} & \end{array} \right\}$$

La cardinalidad de |A| es: $\wp|A| = 8$

Teoría de conjuntos (9)

Universo de individuos: una hipótesis que sustenta la teoría de conjuntos es que nuestros conjuntos y subconjuntos de objetos siempre son porciones DERIVADAS de una enorme (o infinita) colección de objetos. A esta colección infinita se le conoce como **conjunto universal**. Usualmente se emplea el símbolo $\boldsymbol{U}$. Un ejemplo de esto son las gramáticas libres de contexto:

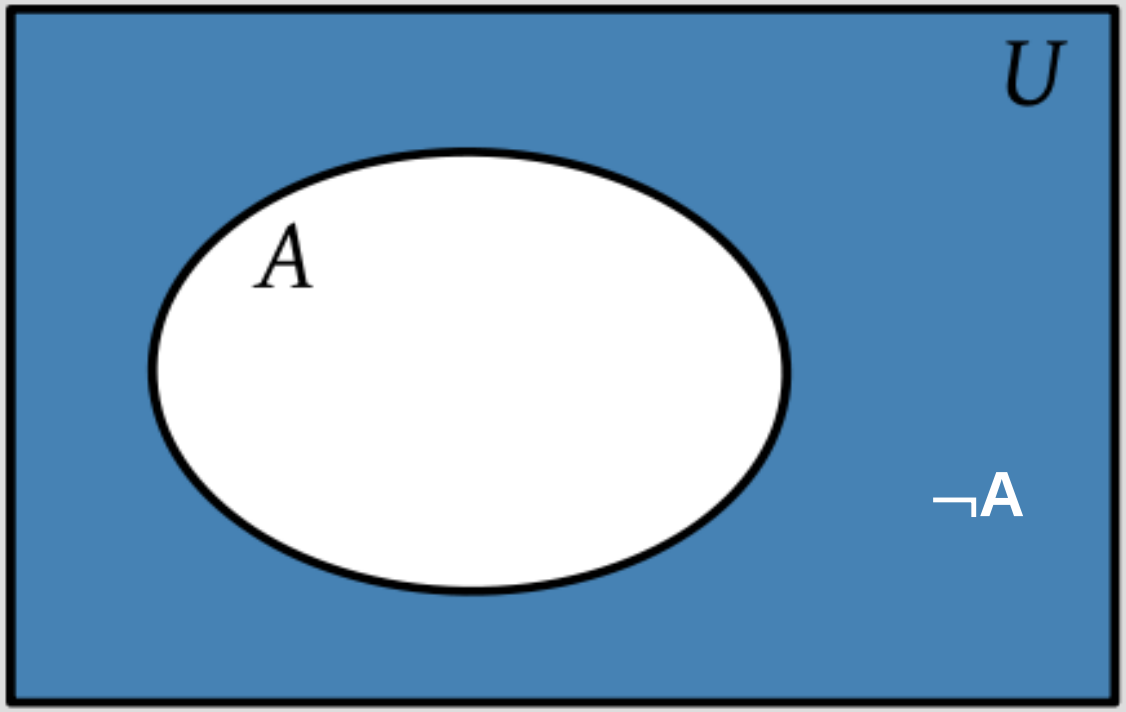
The language of a grammar $G = (V, \Sigma, R, S)$ is the set

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* : S \overset{*}{\Rightarrow} w\}$$

Nota 1: En trabajos de lógica y lingüística, se usan los símbolos $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{G}$ para referirse a todo el universo de individuos que conforman una lengua natural, exactamente con el mismo sentido que $\boldsymbol{U}$.

Teoría de conjuntos (10)

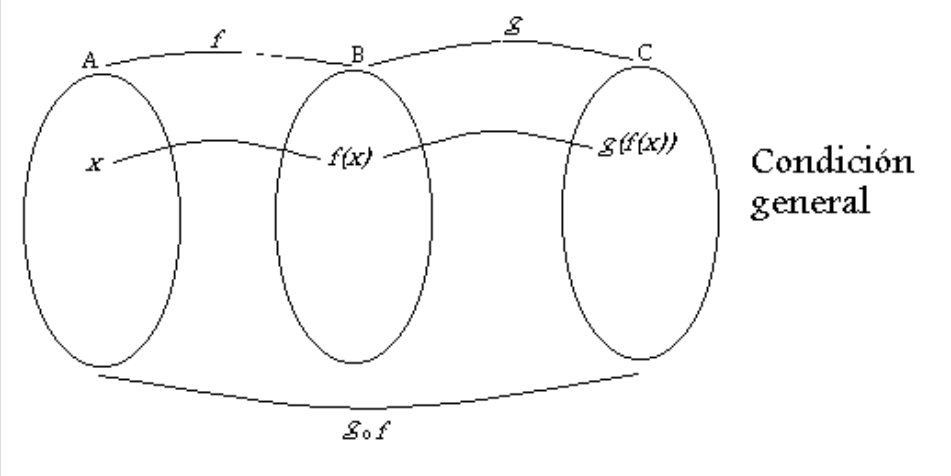
Complementarios de un conjunto: Existe un conjunto *A* del cual sabemos tanto su extensión y su relación con un conjunto ***U***, el cual contiene todos los elementos incluso los que son parte de *A*. Una forma de representar esto es a través de la fórmula: $\neg A = \boldsymbol{U} - A$, es decir: *los objetos que son complementarios al conjunto A, son todos aquellos que no son parte del conjunto A, pero forman parte del Universo de individuos posible*.



Relaciones entre teoría de conjuntos y teoría de la probabilidad

La teoría de conjuntos describe y regula el comportamiento que tienen colecciones de objetos, ya sea entre sí, o entre los miembros que conforman tales colecciones.

Ahora bien, tomando en cuenta estas posibilidades, si añadimos el cálculo de probabilidades, entonces lo que podríamos hacer es *predecir el comportamiento de un conjunto de datos, conforme a las observaciones que hacemos dentro de una serie de experimentos.*



¿Cómo se calcula una probabilidad? (1)

Retomemos lo que vimos en la primera clase respecto a cómo calcular la probabilidad de que un fenómeno ocurra o no.

Para ello, vamos a retomar 3 conceptos básicos para realizar este cálculo:

1. La noción de *experimento*

2. La noción de *evento*

3. La noción de *espacio muestral*

¿Cómo se calcula una probabilidad? (2)

Experimento

- Un **experimento** probabilístico es un proceso que tiene salidas o resultados bien definidos.
  - Lanzar una moneda al aire,
  - Lanzar los dados,
  - Tomar una carta de un mazo,
  - Contestar un examen de opción múltiple,
- Es un proceso mediante el cuál se lleva a cabo una o más observaciones.

¿Cómo se calcula una probabilidad? (2)

Evento

- Un **evento** es cualquier colección de salidas o resultados de un experimento.
  - **Simple:** Ocurre de una sola forma y no se puede descomponer en otros eventos.
  - **Compuesto:** Ocurre en mas de una forma.

Ejemplo: Lanzar un dado es un experimento probabilístico, un evento simple es obtener un 5, un evento compuesto es obtener un número impar, puede ocurrir de tres formas 1,3 o 5.

¿Cómo se calcula una probabilidad? (3)

Espacio muestral

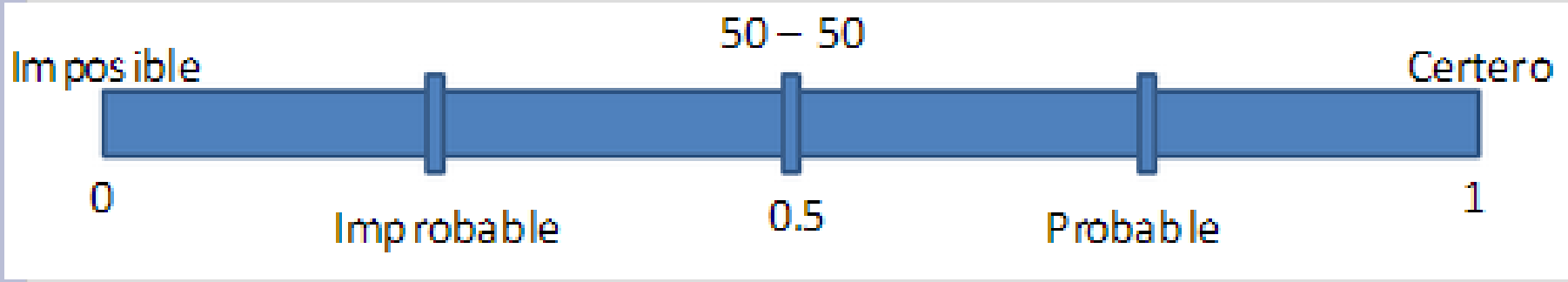
- El espacio muestral *S* de un experimento es el conjunto de todos las posibles eventos simples de un experimento
  - Todas las posibles salidas de un experimento
  - Suponemos que todos los eventos son igualmente probables.

Experimento	Espacio Muestral
Lanzar una moneda	*S* = { Águila, Sol }
Lanzar un dado	*S* = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
Lanzar dos monedas	*S* = { AA, AS, SA, SS }

¿Cómo se calcula una probabilidad? (4)

Una vez definidos estos conceptos, vamos a relacionarlos del siguiente modo: dados todos los posibles eventos que son deducibles de un experimento probabilístico, podemos establecer un espacio muestral en donde vamos a tratar de determinar cuál es el grado de regularidad con el que ocurren (o no) tales eventos.

Podemos decir que la probabilidad *es una escala de valoración, en donde un evento improbable asume un valor 0, en tanto que en un evento plenamente certero asume el valor de 1*:



¿Cómo se calcula una probabilidad? (5)

Hay tres formas de hacer nuestro cálculo de probabilidad: una es por mera suposición, la otra es recolectando evidencia empírica, y finalmente, haciendo un cálculo estableciendo una serie de **condiciones** que, creemos, determinan el que ocurra o no el evento que analizamos.

En el primer caso tenemos una **probabilidad subjetiva**, y es una predicción que podemos lanzar sin más, p.e.: ver el cielo y decir que va a llover.

¿Cómo se calcula una probabilidad? (6)

En contraste, tenemos la **probabilidad empírica**:

Es una aproximación de la probabilidad por medio de la frecuencia relativa

- Se obtiene realizando un experimento un gran número de veces y observando las veces que un evento ocurre.
- Si *P(A)* es la probabilidad relativa de el evento A, entonces:

$$P(A) = \frac{\text{Número de veces que ocurre } A}{\text{Número de veces que se repite el experimento}}$$

¿Cómo se calcula una probabilidad? (7)

Si consideramos la probabilidad empírica, podemos darnos cuenta de algo: conforme repetimos un experimentos varias veces, en algún momento parecerá que el evento que analizamos se volverá **regular**, mostrando así una **tendencia** que permita predecir, con un mínimo grado de error, si tal evento ocurre (o no) en un espacio muestral de mayor dimensión. A este hecho se le conoce como la **ley de los grandes números**.

84	27	51	78	59	52	13	85	61	55		10	68	38	90	08	94	06	65	98	55
28	60	92	04	97	90	31	57	29	33		39	84	09	62	81	36	43	71	05	93
32	96	65	39	80	77	49	86	18	70		54	11	76	37	52	07	88	35	44	61
76	87	71	95	98	81	01	46	88	00		80	40	58	96	69	42	21	04	83	78
48	82	89	47	35	17	10	42	62	34	R-1	70	85	12	41	20	64	34	67	50	45
R-2																				
44	67	93	11	07	43	72	94	69	56		15	79	19	28	13	51	03	22	33	75
53	79	05	22	54	74	58	14	91	02		74	29	14	01	18	31	53	59	46	49
06	68	99	75	26	15	41	66	20	40		63	16	89	30	27	02	47	32	23	86
50	09	64	08	38	30	36	45	83	24		92	87	00	17	66	72	57	25	48	77
03	73	21	23	16	37	25	19	12	63		56	99	82	60	97	26	95	73	91	24

¿Cómo se calcula una probabilidad? (8)

Finalmente, tenemos el cálculo de probabilidad en los términos que postularon Pascal y Fermat, de tal suerte que la explicamos de la siguiente forma:

- Utilizaremos una *P* para denotar probabilidad
- Si *A* es un evento del espacio muestral, entonces *P(A)* se lee como probabilidad de que ocurra *A*.

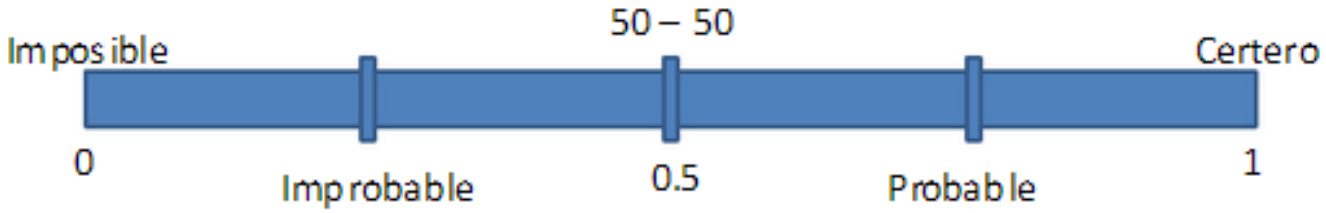
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

n(A) es el número de formas en que A puede ocurrir y n(S) es tamaño del espacio muestral

¿Cómo se calcula una probabilidad? (9)

Esta fórmula nos permite establecer un conjunto de **axiomas** o **reglas**:

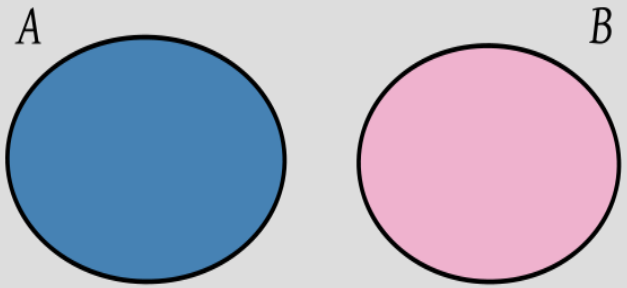
- La probabilidad de un evento va de 0 a 1.
- Si un evento no puede ocurrir, la probabilidad es 0.
- Si un evento ocurre certeramente, la probabilidad es 1.
- La suma de las probabilidades de todas las salidas del espacio muestral es 1.
- La probabilidad de que un evento no ocurra es igual a 1 menos la probabilidad de que ocurra

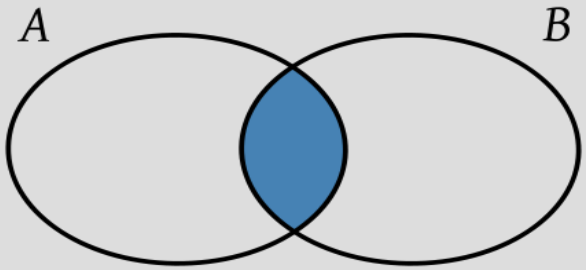


Eventos excluyentes/incluyentes (1)

Algo que podemos hacer considerando estos axiomas es deducir si dos eventos están relacionados o no, de tal forma que cuando ocurren podemos decir que **la realización de un evento condiciona la de otro**.

Para representar estas dos opciones, vamos a tomar en cuenta dos relaciones propias de la teoría de conjuntos: **disjunción** e **intersección.**





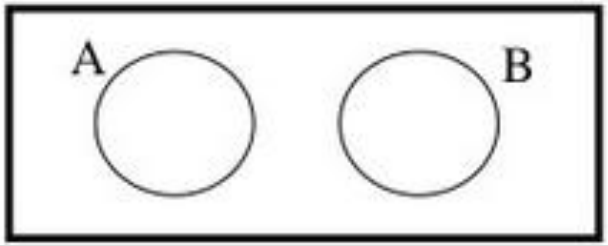
Eventos excluyentes/incluyentes (2)

Veamos el caso de la disjunción:

Se dice que dos **eventos** son **mutuamente excluyentes** si uno y sólo uno de ellos puede tener lugar en un mismo tiempo. Es decir o uno o el otro, pero no pueden suceder ambos al mimos tiempo.

Sean A y B dos eventos mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



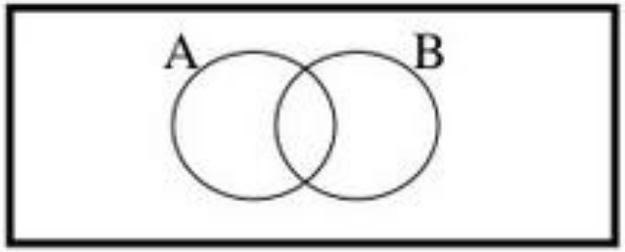
Eventos excluyentes/incluyentes (3)

Sean los eventos A y B **mutuamente no excluyentes** y subconjuntos de un mismo espacio muestral S, entonces, la probabilidad de que ocurra el evento A o el evento B es:

Y en el caso de la intersección:

Sean A y B dos eventos mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Gracias por su atención

Blog del curso:
http://cesaraguilar.weebly.com/meacutetodos-y-teacutecnicas-de-investigacioacuten-cuantitativa.html